

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

A. SAMARTIN, V. JARIA y E. CASTILLO

losa ortótropa circular

Artículo publicado en el n.º 118
de la Revista Hormigón y Acero

1.º trimestre 1976

Depósito legal: M. Sep. 853 - 1958

losa ortótropa circular

A. SAMARTIN, V. JARIA y E. CASTILLO
(E.T.S.I.C.C.P. de Santander)

1. INTRODUCCION

En el proyecto de una autopista moderna, el concepto de puente, como elemento único con tratamiento singular, ha desaparecido, para integrarse y adaptarse a las necesidades de trazado de ésta. De ahí la aparición de puentes irregulares en planta y alzado, cuyo cálculo exige, en general, métodos numéricos.

Sin embargo, existe un tipo de puentes de aparición frecuente, cuyo estudio puede realizarse analíticamente, con las consiguientes ventajas de economía y eficiencia. Este tipo estructural se caracteriza por su planta circular, tal como se indica en la figura 1,

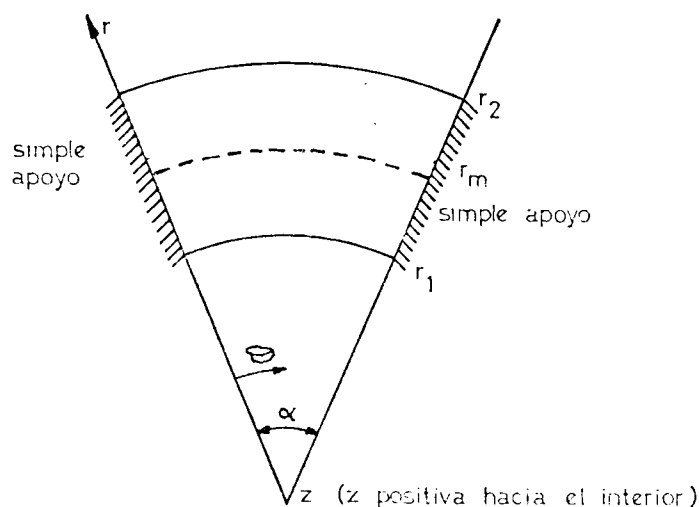


Fig. 1. — Planta de la placa ortótropa curva.

y su análisis, en general, no puede ser asimilado al puente rectangular cuyo estudio analítico es más conocido (referencias 1 y 2). Se presenta aquí un análisis elástico de la losa curva, apoyada en dos bordes radiales y con condiciones de sustentación muy generales en sus bordes curvos, y que pueden englobarse en la condición de existencia de vigas. Casos más complicados con apoyos intermedios podrían ser tratados mediante superposición de varios estados de carga; por ejemplo, introduciendo reacciones incógnitas que se determinan al anular los correspondientes desplazamientos que coaccionan.

La formulación matemática utilizada en este artículo corresponde a una notación matricial que permite: por una parte, una exposición teórica compacta, y por otra, una

programación directa en computador. En general, se ha seguido una técnica de solución tipo Levy, es decir, utilizando un desarrollo en serie de Fourier, de forma análoga a la indicada en la referencia [3], o como se ha expuesto para la placa ortótropa rectangular en [2].

2. TEORIA GENERAL DE LA PLACA ORTOTROPA CURVA

Se adoptan coordenadas cilíndricas (r, θ, z) como aparece en la figura 1, y se utiliza la notación indicada en el apéndice. La superficie media corresponde al plano $z = 0$.

Los esfuerzos positivos por unidad de longitud y las acciones por unidad de superficie en un elemento diferencial se define en la figura 2.

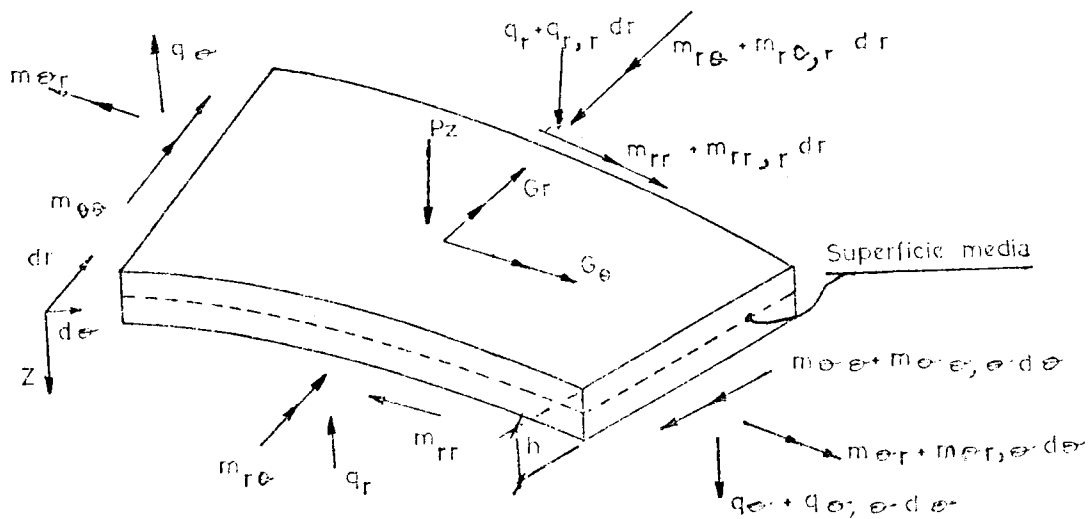


Fig. 2. — Acciones y esfuerzos.

Las hipótesis adoptadas corresponden a una teoría lineal, elástica de placas delgadas, sin considerar la deformación a cortante.

Las ecuaciones de equilibrio se plantean en el elemento diferencial y se obtiene:

$$\begin{aligned} m_{\theta r, r} + m_{\theta\theta, \theta} + (r m_{r\theta}),_r - r q_\theta - r G_r &= 0 \\ -m_{\theta\theta} + m_{\theta r, \theta} + (r m_{r r}),_r - r q_r + r G_\theta &= 0 \\ r P_z + q_{\theta, \theta} + (r q_r),_r &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Siendo por hipótesis:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij})_z z dz \quad ; \quad q_i = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{iz})_z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij})_z dz &= 0 \quad ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{zi})_z z dz = 0 \quad ; \quad i, j = r, \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Eliminando q_i en (1) se deduce:

$$\frac{1}{r^2} (m_{\theta r, r} + m_{\theta\theta, \theta} - m_{r\theta, \theta}) + \frac{1}{r} (m_{r\theta, r} - m_{\theta\theta, r} + m_{\theta r, \theta} + 2 m_{r r, r}) + m_{r r, r r} + P = 0 \quad (3)$$

con:

$$P = p(r, \theta) = P_z - \frac{1}{r} G_{r, \theta} + \frac{1}{r} (G_\theta + r G_{\theta, r})$$

Las condiciones constitutivas de ortotropía son:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta})_z &= \frac{1}{1 - \nu_\theta \nu_r} [(\epsilon_{\theta\theta})_z E_\theta + (\epsilon_{rr})_z \nu_r E_r] \\ (\sigma_{rr})_z &= \frac{1}{1 - \nu_\theta \nu_r} [(\epsilon_{rr})_z E_r + (\epsilon_{\theta\theta})_z \nu_\theta E_\theta] \\ (\sigma_{r\theta})_z &= (\epsilon_{r\theta})_z E_{r\theta} \\ (\sigma_{\theta r})_z &= (\epsilon_{\theta r})_z E_{\theta r} \end{aligned} \quad (4)$$

Las relaciones desplazamientos/deformación se obtienen mediante consideraciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\theta\theta})_z &= -\frac{z}{r} \left(w_{, r} + \frac{1}{r} w_{, \theta\theta} \right) \\ (\epsilon_{rr})_z &= -z w_{, rr} \\ (\epsilon_{r\theta})_z &= (\epsilon_{\theta r})_z = -\frac{z}{r} \left(-\frac{1}{r} w_{, \theta} + w_{, \theta r} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Introduciendo las ecuaciones (5) y (4) en las expresiones (2) se deducen las relaciones esfuerzos/desplazamientos siguientes:

$$\begin{aligned} m_{\theta\theta} &= - \left[k_\theta \left(\frac{1}{r} w_{, r} + \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} \right) + d_r w_{, rr} \right] \\ m_{rr} &= - \left[k_r w_{, rr} + d_\theta \left(\frac{1}{r} w_{, r} + \frac{1}{r^2} w_{, \theta\theta} \right) \right] \\ m_{r\theta} &= -k_{r\theta} \left(\frac{1}{r} w_{, \theta r} - \frac{1}{r^2} w_{, \theta} \right) \\ m_{\theta r} &= -k_{\theta r} \left(\frac{1}{r} w_{, \theta r} - \frac{1}{r^2} w_{, \theta} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

con:

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{h^3}{12} \frac{E_r}{1 - \nu_\theta \nu_r} \\ k_\theta &= \frac{h^3}{12} \frac{E_\theta}{1 - \nu_\theta \nu_r} \\ k_{r\theta} &= \frac{h^3}{12} E_{r\theta} \\ k_{\theta r} &= \frac{h^3}{12} E_{\theta r} \\ d_\theta &= \nu_\theta k_\theta \\ d_r &= \nu_r k_r \end{aligned} \quad (7)$$

Si se sustituyen las igualdades (6) en la ecuación de equilibrio (3) resulta la ecuación general de la placa ortótropa en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^4} [k_{\theta} w_{,\theta\theta\theta\theta} + 2(k_{\theta} + k) w_{,\theta\theta}] + \frac{1}{r^3} [-2k w_{,\theta\theta r} + k_{\theta} w_{,r}] + \\ & + \frac{1}{r^2} \left[2k w_{,\theta\theta rr} - k_{\theta} w_{,rrr} \right] + \frac{2}{r} k_r w_{,rrr} + k_r w_{,rrrr} = P(r, \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

con:

$$k = \frac{1}{2} (d_r + d_{\theta} + k_{r\theta} + k_{\theta r})$$

La expresión (8) se puede escribir en forma compacta:

$$L(w) = P(r, \theta) \quad (9)$$

En el caso de isotropía se tiene:

$$\begin{aligned} E_r = E_{\theta} = E \quad ; \quad \nu_r = \nu_{\theta} = \nu \quad ; \quad E_{\theta r} = E_{r\theta} = \frac{E}{(1 + \nu)} = 2G \\ k_r = k_{\theta} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} = D \quad ; \quad k_{\theta r} = k_{r\theta} = D(1 - \nu) \\ d_r = d_{\theta} = \nu D \quad ; \quad k = D \end{aligned}$$

Si se supone que existe conservación de energía, entonces se puede mostrar que para las condiciones usuales de borde se tiene:

$$d_r = d_{\theta} = d = k - \frac{1}{2} (k_{r\theta} + k_{\theta r})$$

Las relaciones de todos los esfuerzos/desplazamientos se resumen a continuación:

$$\begin{aligned} m_{\theta\theta} &= - \left[k_{\theta} \left(\frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + d_{\theta} w_{,rr} \right] \\ m_{rr} &= - \left[k_r w_{,rrr} + d_r \left(\frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) \right] \\ m_{\theta r} &= - k_{\theta r} \left[\frac{1}{r} \left(w_{,\theta r} - \frac{1}{r} w_{,\theta} \right) \right] \\ m_{r\theta} &= - k_{r\theta} \left[\frac{1}{r} \left(w_{,\theta r} - \frac{1}{r} w_{,\theta} \right) \right] \\ q_{\theta} &= - \left[\frac{1}{r^3} k_{\theta} w_{,\theta\theta\theta} + k_{\theta} \frac{1}{r^2} w_{,\theta r} + \frac{k}{r} w_{,\theta rr} \right] \\ q_r &= - \left\{ \frac{1}{r^3} [-w_{,\theta\theta}(k_{\theta} + k)] + \frac{1}{r^2} [k w_{,\theta\theta r} - k_{\theta} w_{,r}] + \frac{1}{r} k_r w_{,rr} + k_r w_{,rrr} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

donde es conveniente introducir las reacciones de Kirchoff:

$$\begin{aligned}
 s_r &= q_r + \frac{1}{r} m_{r, \theta, \theta} = - \left\{ \frac{1}{r^3} [-w_{, \theta \theta} (k_\theta + k + k_{r \theta})] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^2} [w_{, \theta \theta r} (k + k_{r \theta}) - k_\theta w_{, r}] + \frac{1}{r} k_r w_{, r r} + k_r w_{, r r r} \right\} \\
 s_\theta &= q_\theta + m_{\theta r, r} = - \left[\frac{1}{r^3} (k_\theta w_{, \theta \theta \theta} + 2 k_{\theta r} w_{, \theta}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^2} (k_\theta - 2 k_{\theta r}) w_{, \theta r} + \frac{1}{r} w_{, \theta r r} (k + k_{\theta r}) \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

3. SOLUCION DE LA ECUACION GENERAL

La solución de la ecuación (8), con las condiciones de borde $w = m_{\theta\theta} = 0$ a lo largo de $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$, y generales en los otros dos bordes, $r = r_1$ y $r = r_2$, se puede obtener como suma de la solución complementaria w_c y de la solución particular w_0 , es decir:

$$w = w_c + w_0 \tag{12}$$

3.1. Solución complementaria.

La solución complementaria w_c es por definición la solución de:

$$L(w_c) = 0 \tag{13}$$

Se puede suponer:

$$w_c = \sum_{n=1}^{\infty} w_{c,n}(r) \sin \lambda_n \theta \tag{14}$$

con:

$$\lambda_n = \frac{n \pi}{\alpha} > 0$$

Así, pues, w_c satisface las condiciones de contorno de simple apoyo en $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$.

La ecuación (13) se convierte al introducir el desarrollo (14) y considerar el término n -ésimo del mismo en la expresión:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{1}{\beta^4} [k_\theta \lambda^4 - 2 \lambda^2 (k_\theta + k)] + \frac{1}{\beta^3} (2 k \lambda^2 + k_\theta) \frac{\partial}{\partial \beta} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\beta^2} (-2 \lambda^2 k - k_\theta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{2}{\beta} k_r \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + k_r \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right\} w_c = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Siendo $\beta = \frac{r}{r_m}$ una variable adimensional.

En forma compacta, la ecuación (15) se puede escribir:

$$L_1(w_c) = 0$$

Se ha suprimido el subíndice n en la ecuación (15) y en todas las que sigue por conveniencia de la escritura, sin que ello implique riesgo de confusión en la interpretación de las fórmulas.

Si se supone la solución de la ecuación diferencial (15) de la forma $w_c = \beta^t$ se obtiene al sustituir y ordenar:

$$k_r t^4 - 4 k_r t^3 + (5 k_r - 2 \lambda^2 k - k_0) t^2 + (-2 k_r + 4 \lambda^2 k + 2 k_0) t + k_0 \lambda^4 - 2 \lambda^2 (k_0 + k) = 0 \quad (16)$$

Si se hace el cambio $t = 1 + u$ en (16) resulta:

$$u^4 - 2 u^2 \gamma_1 + \gamma_2^4 = 0 \quad (17)$$

con:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(1 + 2 \lambda^2 \frac{k}{k_r} + \frac{k_0}{k_r} \right)$$

$$\gamma_2 = \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_r} \sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

Como $k_0, k \geq 0$; $k_r > 0$ y $\lambda \geq 1$ se tienen las desigualdades:

$$\gamma_1 \geq \frac{1}{2}$$

$$\gamma_2 \geq 0$$

La solución de la ecuación característica (17) es:

$$u^2 = \gamma_1 (1 \pm \sqrt{1 - \gamma_2^4 / \gamma_1^2})$$

y conviene distinguir tres casos:

Caso 1:

$$\gamma_2^2 > \gamma_1$$

$$u = \pm (s_1 \pm s_2 i)$$

con:

$$s_1 = \gamma_2 \cos \varphi / 2$$

$$s_2 = \gamma_2 \operatorname{sen} \varphi / 2$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\cos \varphi = \gamma_1 \gamma_2^{-2}$$

La solución complementaria es:

$$w_c = \beta^{1+s_1} [A_1 \cos(s_2 L \beta) + A_2 \operatorname{sen}(s_2 L \beta)] + \beta^{1-s_1} [A_3 \cos(s_2 L \beta) + A_4 \operatorname{sen}(s_2 L \beta)]$$

Caso 2:

$$\gamma_2^2 = \gamma_1$$

$$u = \pm s \quad (\text{raíces dobles})$$

con:

$$s = \gamma_2$$

La solución complementaria es:

$$w_c = \beta^{1+s} (A_1 L \beta + A_2) + \beta^{1-s} (A_3 L \beta + A_4)$$

Caso 3:

$$\gamma_2^2 < \gamma_1$$

que se subdivide en dos subcasos:

Caso 3.1:

$$\gamma_2 \neq 0$$

$$u = \pm (s_1 \pm s_2)$$

con:

$$s_1 = \gamma_2 c h \varphi / 2$$

$$s_2 = \gamma_2 s h \varphi / 2$$

$$c h \varphi = \gamma_1 \gamma_2^{-2}$$

La solución complementaria es:

$$w_c = \beta^{1+s_1} [A_1 c h (s_2 L \beta) + A_2 s h (s_2 L \beta)] + \beta^{1-s_1} [A_3 c h (s_2 L \beta) + A_4 s h (s_2 L \beta)]$$

que puede adoptar la forma más sencilla:

$$w_c = \frac{1}{2} [A_1 \beta^{1+s_1+s_2} + A_2 \beta^{1+s_1-s_2} + A_3 \beta^{1-s_1+s_2} + A_4 \beta^{1-s_1-s_2}]$$

Caso 3.2:

$$\gamma_2 = 0$$

$$u = 0 \quad (\text{raíz doble})$$

$$u = \pm s_2$$

con:

$$s_2 = (2 \gamma_1)^{1/2}$$

La solución complementaria es:

$$w_c = \beta (A_1 L \beta + A_2) + A_3 \beta^{1+s_2} + A_4 \beta^{1-s_2}$$

Con objeto de facilitar el cálculo por computador es conveniente introducir la siguiente notación matricial:

$$S_c^T = \left[w ; w_r ; \frac{1}{r} w_0 ; m_{rr} ; m_{00} ; m_{r0} ; m_{0r} ; q_r ; q_0 ; s_r ; s_0 \right]$$

Pudiéndose descomponer esta matriz resultante S_c , que incluye todos los resultados de interés en un cálculo, correspondientes al término n -ésimo de la solución complementaria, en la forma siguiente:

$$S_c = T R_c \quad (18)$$

siendo:

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{G} \mathbf{F} \mathbf{A}_{1234} \quad (19)$$

\mathbf{T} es una matriz diagonal de 11×11 elementos, cuyos términos no nulos son $(a, a, b, a, a, b, b, a, b, a, b)$, con $a = \sin \lambda \theta$ y $b = \cos \lambda \theta$:

$$\mathbf{A}_{1234} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}$$

La expresión de la matriz \mathbf{G} de (11×4) viene dada en la tabla 1.

La matriz \mathbf{F} de (4×4) será según el caso considerado:

Caso 1:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} [\mathbf{B}_1 (1 + s_1) \mathbf{P}_1 \quad , \quad \mathbf{B}_1 (1 - s_1) \mathbf{P}_1]$$

Caso 2:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} [\mathbf{B}_2 (1 + s) \mathbf{P}_2 \quad , \quad \mathbf{B}_2 (1 - s) \mathbf{P}_2]$$

Caso 3.1:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} [\mathbf{B}_3 (1 + s_1) \mathbf{P}_3 \quad , \quad \mathbf{B}_3 (1 - s_1) \mathbf{P}_3]$$

Caso 3.2:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} [\mathbf{B}_2 (1) \mathbf{P}_2 \quad , \quad \mathbf{B}_3 (1) \mathbf{P}_3]$$

TABLA 1. — Matriz \mathbf{G}

1	0	0	0
0	$1/r_m$	0	0
$\lambda/\beta r_m$	0	0	0
$\lambda^2 d$	d	k_r	0
$\beta^2 r_m^2$	βr_m^2	r_m^2	0
$k_\theta \lambda^2$	k_θ	d	0
$\beta^2 r_m^2$	βr_m^2	r_m^2	0
$k_{r\theta} \lambda$	$\lambda k_{r\theta}$	0	0
$\beta^2 r_m^2$	βr_m^2	0	0
$k_{\theta r} \lambda$	$k_{\theta r} \lambda$	0	0
$\beta^2 r_m^2$	βr_m^2	0	0
$\lambda^2 (k_\theta + k)$	$(\lambda^2 k + k_\theta)$	k_r	k_r
$\beta^3 r_m^3$	$\beta^2 r_m^3$	βr_m^3	r_m^3
$\lambda^3 k_\theta$	λk_θ	λk	0
$\beta^3 r_m^3$	$\beta^2 r_m^3$	βr_m^3	0
$(k_\theta + k + k_{r\theta}) \lambda^2$	$\lambda^2 (k_{r\theta} + k) + k_\theta$	k_r	k_r
$\beta^3 r_m^3$	$\beta^2 r_m^3$	βr_m^3	r_m^3
$\lambda^3 k_\theta - 2 \lambda k_{\theta r}$	$\lambda (k_\theta - 2 k_{\theta r})$	$(k + k_{\theta r})$	0
$\beta^3 r_m^3$	$\beta^2 r_m^3$	βr_m^3	0

Donde se ha utilizado la siguiente notación:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^{-2} & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 2\beta^{-3} & -3\beta^{-3} & \beta^{-3} \end{bmatrix}$$

$$B_1(s_1) = \beta^{s_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & s_2 \\ s_1^2 - s_2^2 & 2s_1 s_2 \\ s_1^3 - 3s_1 s_2^2 & -s_2^3 + 3s_2 s_1^2 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cos(s_2 L \beta) & \operatorname{sen}(s_2 L \beta) \\ -\operatorname{sen}(s_2 L \beta) & \cos(s_2 L \beta) \end{bmatrix}$$

$$B_2(s) = \beta^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \\ s^2 & 2s \\ s^3 & 3s^2 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & L\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3(s_1) = \beta^{s_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & s_2 \\ s_1^2 + s_2^2 & 2s_1 s_2 \\ s_1^3 + 3s_1 s_2^2 & s_2^3 + 3s_2 s_1^2 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta^{s_2} + \beta^{-s_2} & \beta^{s_2} - \beta^{-s_2} \\ \beta^{s_2} - \beta^{-s_2} & \beta^{s_2} + \beta^{-s_2} \end{bmatrix}$$

3.2. Solución particular.

La solución particular es por definición una solución de la ecuación (9):

$$L(w_0) = p(r, \theta) = P \quad (20)$$

sin considerar las ecuaciones de contorno.

Se estudian a continuación dos tipos de carga P .

3.2.1. Carga uniforme en toda la placa.

El desarrollo en serie de Fourier de una carga $p(r, \theta)$ de valor constante es:

$$p(r, \theta) = p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \operatorname{sen} \lambda \theta$$

Si se desarrolla la solución particular w_0 , asimismo en serie de Fourier, se tiene:

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} w_{0n} \operatorname{sen} \lambda \theta \quad (21)$$

Esta expresión, que satisface automáticamente las condiciones de contorno en $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$, si se introduce en la ecuación (20) y se considera el término n -ésimo se obtiene una ecuación del tipo:

$$L_1(w_{0n}) = r^4_m P_{0n}(\beta) \quad (22)$$

y análogamente a como se hizo cuando se estudiaba la solución complementaria, se prescinde del subíndice n , entendiendo que se hace referencia a dicho término, salvo indicación contraria.

Se determina a continuación una solución particular de la ecuación (22), en la que se distinguen tres casos; y para cuya resolución conviene definir previamente los parámetros siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \\ \mu_2 \end{array} \right\} = \left(\frac{k_0 + 9k \pm 3(k_0^2 + 9k^2 + 2kk_0 - 8k_r k_0)^{1/2}}{k_0} \right)^{1/2}$$

Caso A:

$$\lambda \neq \mu_1 \quad \text{y} \quad \lambda \neq \mu_2$$

Solución particular:

$$w_0 = \frac{p_0 \beta^4 r_m^4}{\lambda^4 k_0 - \lambda^2 (2k_0 + 18k) + 72k_r - 8k_0}$$

Caso B:

$$\lambda = \mu_1 \quad \text{ó} \quad \lambda = \mu_2 \quad \text{con} \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

Solución particular:

$$w_0 = \frac{p_0 \beta^4 L \beta r_m^4}{-6(2k\lambda^2 + k_0) + 102k_r}$$

Caso C:

$$\lambda = \mu_1 = \mu_2$$

Solución particular:

$$w_0 = \frac{p_0 \beta^4 (L\beta)^2 r_m^4}{-2(2k\lambda^2 + k_0) + 106k_r}$$

Con lo que el vector resultante \mathbf{S}_0 , definido de manera análoga al apartado anterior, se obtiene para cada armónico de la expresión:

$$\mathbf{S}_0 = T \mathbf{R}_0$$

Variando la forma de \mathbf{R}_0 según el caso:

Caso A:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{B}_2(4) \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{w_0}{\beta^4}$$

Caso B:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{B}_2(4) \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{w_0}{\beta^4 (L\beta)}$$

Caso C:

$$R_0 = G \left\{ D B_2(4) P_2 \begin{bmatrix} 0 \\ L \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \beta^2 \\ 18 \beta \end{bmatrix} \right\} \frac{w_0}{\beta^4 (L \beta)^2}$$

3.2.2. Cuchillo de carga a lo largo del radio $r = r_k = \beta_k r_m$.

Se puede expresar la carga en la forma:

$$p(r, \theta) = \frac{1}{r_m} P(\theta) \delta(\beta - \beta_k)$$

Se procede de forma análoga al caso anterior desarrollando la carga en serie de Fourier:

$$p(r, \theta) = \delta(\beta - \beta_k) \sum_{n=1}^{\infty} P_{0n} \sin \lambda \theta$$

con:

$$P_{0n} = \frac{2}{\alpha r_m} \int_0^\alpha P(\theta) \sin \lambda \theta d\theta$$

El caso particular de carga puntual P en $\theta = \theta_k$ se tiene:

$$P(\theta) = P \delta(\theta - \theta_k) \frac{1}{\beta_k r_m}$$

y

$$P_{0n} = \frac{2 P \sin(\lambda \theta_k)}{\alpha} \frac{1}{\beta_k r_m^2}$$

En cambio, si el cuchillo de carga es uniforme $P(\theta) = P$:

$$P_{0n} = \frac{1}{r_m} \frac{2 P}{n \pi} (1 - \cos n \pi) = \frac{2 P}{\alpha \lambda r_m} (1 - \cos \lambda \alpha).$$

Así, pues, el término n -ésimo de la solución particular w_0 debe satisfacer la ecuación:

$$L_1(w_{0n}) = r_m^4 P_{0n} \delta(\beta - \beta_k) \quad (23)$$

Prescindiendo en lo que sigue por comodidad de escritura del subíndice n ; se deben cumplir por continuidad las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} w_0(\beta_k - 0) &= w_0(\beta_k + 0) \\ w_0'(\beta_k - 0) &= w_0'(\beta_k + 0) \\ w_0''(\beta_k - 0) &= w_0''(\beta_k + 0) \\ w_0'''(\beta_k + 0) &= w_0'''(\beta_k - 0) + \frac{P_0 r_m^4}{k_r} \end{aligned}$$

La solución w_0 puede obtenerse a partir de la estructura de la solución complementaria introduciendo unos valores determinados de las constantes A_{1234} , que deberán cumplir las condiciones anteriores, y se deducen fácilmente los resultados siguientes según los casos:

Caso 1:

$$R_0 = G D B_1 (1 + s_1) P_1 A^0_{12} \text{ si } \beta_k \geq \beta \geq \beta_1$$

$$R_0 = G D B_1 (1 - s_1) P_1 A^0_{34} \text{ si } \beta_2 \geq \beta \geq \beta_k$$

Caso 2:

$$R_0 = G D B_2 (1 + s) P_2 A^0_{12} \text{ si } \beta_k \geq \beta \geq \beta_1$$

$$R_0 = G D B_2 (1 - s) P_2 A^0_{34} \text{ si } \beta_2 \geq \beta \geq \beta_k$$

Caso 3.1:

$$R_0 = G D B_3 (1 + s_1) P_3 A^0_{12} \text{ si } \beta_k \geq \beta \geq \beta_1$$

$$R_0 = G D B_3 (1 - s_1) P_3 A^0_{34} \text{ si } \beta_2 \geq \beta \geq \beta_k$$

Caso 3.2:

$$R_0 = G D B_2 (1) P_2 A^0_{12} \text{ si } \beta_k \geq \beta \geq \beta_1$$

$$R_0 = G D B_3 (1) P_3 A^0_{34} \text{ si } \beta_2 \geq \beta \geq \beta_k$$

Las constantes A^0_{12} y A^0_{34} vienen definidas en cada caso en la tabla 2.

TABLA 2

Casos	A^0_{12}	A^0_{34}
1	$\beta_k^2 - s_1 P_1^{-1} \left[\begin{array}{c} + \frac{1}{s_1} \\ 1 \\ - \frac{1}{s_2} \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{4 \gamma_2^2 k_r}$	$\beta_k^2 + s_1 P_1^{-1} \left[\begin{array}{c} + \frac{1}{s_1} \\ 1 \\ + \frac{1}{s_2} \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{4 \gamma_2^2 k_r}$
2	$\beta_k^2 - s P_2^{-1} \left[\begin{array}{c} + \frac{1}{s} \\ - 1 \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{4 \gamma_2^2 k_r}$	$\beta_k^2 + s P_2^{-1} \left[\begin{array}{c} + \frac{1}{s} \\ + 1 \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{4 \gamma_2^2 k_r}$
3-1	$\beta_k^2 - s_1 P_3^{-1} \left[\begin{array}{c} + \frac{1}{s_1} \\ 1 \\ - \frac{1}{s_2} \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{4 \gamma_2^2 k_r}$	$\beta_k^2 + s_1 P_3^{-1} \left[\begin{array}{c} + \frac{1}{s_1} \\ 1 \\ + \frac{1}{s_2} \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{4 \gamma_2^2 k_r}$
3-2	$\beta_k^2 P_2^{-1} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{2 \gamma_1 k_r}$	$\beta_k^2 P_3^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ - \frac{1}{s_2} \end{array} \right] \frac{P_0 r^4_m}{2 \gamma_1 k_r}$

Con:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos(s_2 L \beta_k) & -\sin(s_2 L \beta_k) \\ \sin(s_2 L \beta_k) & \cos(s_2 L \beta_k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -L \beta_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_3^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2} & -\beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2} \\ -\beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2} & \beta_k^{s_2} + \beta_k^{-s_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.3. Solución final.

La solución final, es decir, la correspondiente a la ecuación (8) con las condiciones de contorno, se obtienen para cada armónico como:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{cn} + \mathbf{R}_{0n} \quad (24)$$

y los resultados finales se deducen mediante la suma:

$$\mathbf{S}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{T}_n \mathbf{R}_n \quad (25)$$

Las constantes arbitrarias de la solución complementaria se determinan al considerar las condiciones de borde a lo largo de β_1 y β_2 . Se estudian a continuación dos casos importantes.

3.3.1. Condiciones homogéneas de borde.

Todas las condiciones de este tipo correspondientes a bordes libres, apoyados o empotrados, etc., pueden ser incluidos en la siguiente forma general:

$$\mathbf{k}_{dj} \begin{bmatrix} -w, r \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{pj} \begin{bmatrix} m_{rr} \\ s_r \end{bmatrix} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (26)$$

Ecuación matricial que se plantea para cada borde; supuesto que el borde j corresponde a $\beta = \beta_j$ y siendo \mathbf{k}_{dj} y \mathbf{k}_{pj} , matrices cuadradas (2×2) formadas por 1 y 0 exclusivamente, y tales que $\mathbf{k}_{dj} + \mathbf{k}_{pj} = \mathbf{I}$ (matriz unidad de 2×2).

La consideración de estas condiciones de borde en el cálculo se realiza como sigue:

Se introduce la siguiente nomenclatura:

a_{jk} : matriz fila k de (1×4) de \mathbf{GF} correspondiente al borde $\beta = \beta_j$.

b_{jk} : elemento de k de \mathbf{R}_{0n} correspondiente al borde $\beta = \beta_j$ (bordes 1, 2).

$$j = 1, 2$$

$$k = 1, 2, 4, 10$$

Para cada armónico se obtiene la matriz de constantes \mathbf{A}_{1234} de la solución complementaria mediante el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{d1} \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p1} \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{1,10} \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{d2} \begin{bmatrix} -a_{22} \\ a_{21} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p2} \begin{bmatrix} a_{24} \\ a_{2,10} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{A}_{1234} = - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{d1} \begin{bmatrix} -b_{12} \\ b_{11} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p1} \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{1,10} \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{d2} \begin{bmatrix} -b_{22} \\ b_{21} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{p2} \begin{bmatrix} b_{24} \\ b_{2,10} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Determinado A_{1234} para cada armónico, se calcula R_{cn} mediante la fórmula (19), aplicando (24) se obtiene R_n ; y, por último, con (25) se hallan los resultados finales, es decir, $S(r, \theta)$.

3.3.2. Viga de borde.

Considerando la viga curva de radio r'_j ($j = 1, 2$, según el borde), las ecuaciones de equilibrio de un elemento diferencial (fig. 3) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{d\theta} + r'_j Z_j(\theta) &= 0 \\ \frac{dm_{tj}}{d\theta} - m_{fj} + r'_j G_{tj}(\theta) &= 0 \\ \frac{dm_{fj}}{d\theta} + m_{tj} - r'_j q_j + r'_j G_{fj}(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Siendo $Z(\theta)$, $G_t(\theta)$ y $G_f(\theta)$ acciones por unidad de longitud y con los sentidos positivos indicados en la figura 3.

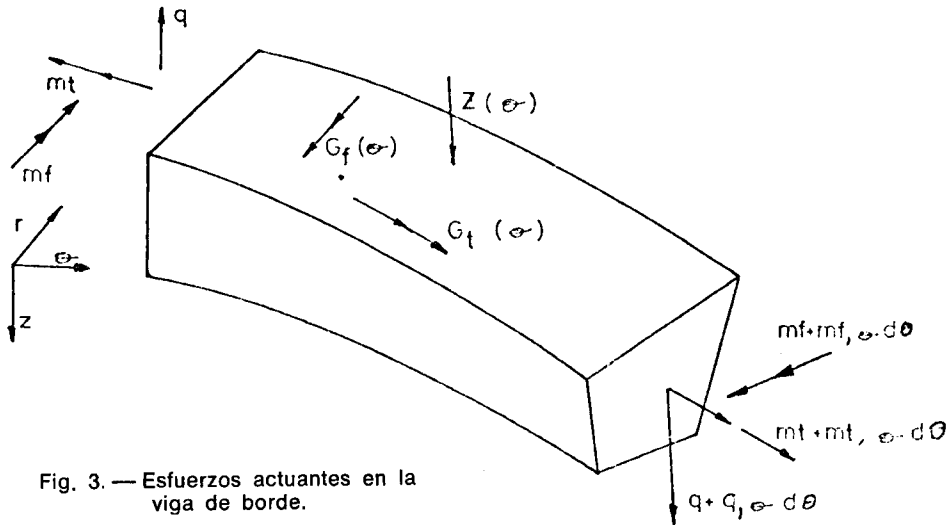


Fig. 3. — Esfuerzos actuantes en la viga de borde.

Las relaciones esfuerzos/deformación tienen la forma (w , flecha, y φ , giro de torsión):

$$mf_j = -\frac{(EI)_j}{r_j'^2} [w_{j,\theta\theta} - r'_j \varphi_j] \quad mt_j = \frac{(GI)_j}{r_j'^2} [w_{j,\theta} + r'_j \varphi_{j,\theta}] \quad (28)$$

Si se supone apoyo simple en $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$ la matriz de rigidez de la viga para el armónico n se deduce como sigue:

Sea:

$$\begin{aligned} Z_j(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_{jn} \sin \lambda_n \theta \\ G_{tj}(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{tjn} \sin \lambda_n \theta \\ G_{fj}(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{fjn} \sin \lambda_n \theta \end{aligned} \quad (29)$$

Se supone:

$$\begin{aligned} w_j(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} W \sin \lambda_n \theta \\ \varphi_j(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jn} \sin \lambda_n \theta \end{aligned} \quad (30)$$

eliminando entre (27) y (28) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(D^2 - \frac{1}{\mu_j}\right) D^2 w_j + r'_j \left(1 + \frac{1}{\mu_j}\right) D^2 \varphi_j + r_j'^3 \frac{(Z_1)_j}{(E I)_j} &= 0 \\ (1 + \mu_j) D^2 w_j + r'_j (D^2 - \mu_j) \varphi_j + r_j'^3 \frac{G_{tj}}{(G J)_j} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} D &= \frac{d}{d\theta} \\ \mu_j &= \frac{(E I)_j}{(G J)_j} \\ (Z_1)_j &= r' Z_j + D G_{fj} \end{aligned}$$

Introduciendo las ecuaciones (29) y (30) en (31) se determina una matriz de rigidez en ejes locales, que prescindiendo del subíndice n , como se hizo anteriormente, resulta:

$$\begin{bmatrix} G_{tj} \\ (Z_1)_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_j'^2} (\lambda^2 (G J)_j + (E I)_j) & \frac{\lambda^2}{r_j'^3} ((E I)_j + (G J)_j) \\ \frac{\lambda^2}{r_j'^2} ((E I)_j + (G J)_j) & \frac{\lambda^2}{r_j'^3} (\lambda^2 (E I)_j + (G J)_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_j \\ W_j \end{bmatrix} \quad (32)$$

o en forma más compacta:

$$\begin{bmatrix} G_t \\ Z_1 \end{bmatrix}_j = R_j \begin{bmatrix} \Phi \\ W \end{bmatrix}_j \quad (33)$$

Suponiendo que la viga de borde tiene un eje principal de inercia perpendicular al eje de coordenadas r , la transformación de *ejes viga* a *ejes de la placa* es para el borde j (fig. 4):

$$\begin{bmatrix} m_{rr} \\ s_r \end{bmatrix}_j \text{ placa} = (-)^{i+1} \begin{bmatrix} 1 & d_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_t \\ Z_1 \end{bmatrix}_j \text{ viga} \quad (34)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_{rr} \\ s_r \end{bmatrix}_j \text{ placa} = (-)^{i+1} T_j \begin{bmatrix} G_t \\ Z_1 \end{bmatrix}_j \text{ viga} \quad (35)$$

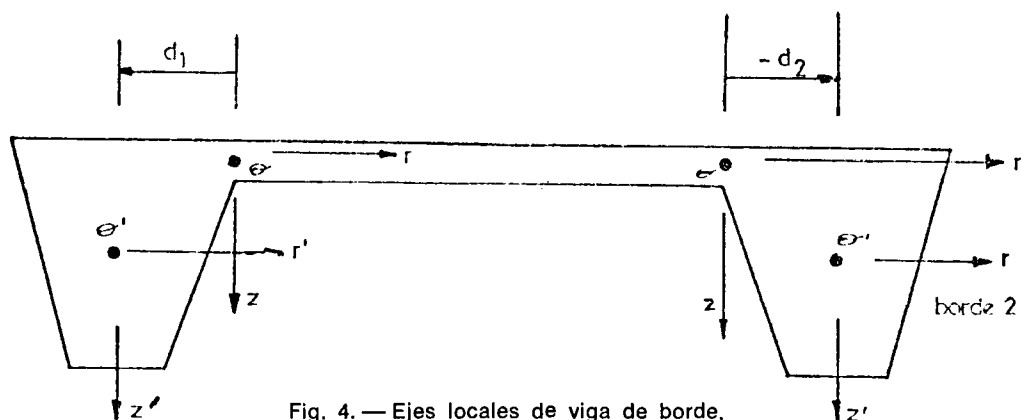


Fig. 4. — Ejes locales de viga de borde.

y análogamente para desplazamientos:

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ W \end{bmatrix}_j \text{ viga} = T_j^T \begin{bmatrix} -w, r \\ w \end{bmatrix}_{\text{placa}} \quad (36)$$

De (33), (35) y (36) se deduce:

$$\begin{bmatrix} m_{rr} \\ S_r \end{bmatrix}_j \text{ placa} = (-)^{i+1} T_j R_j T_j^T \begin{bmatrix} -w, r \\ w \end{bmatrix}_j \text{ placa} \quad (37)$$

La ecuación (37) tiene la misma estructura matemática que la (26), suponiendo:

$$\begin{aligned} K_{pj} &= I_2 \\ K_{dj} &= (-)^i T_j R_j T_j^T \end{aligned}$$

Resolviéndose este caso análogamente al anterior 3.3.1.

4. EJEMPLO

La teoría expuesta anteriormente ha sido recogida en un programa escrito en *basic*, para su proceso en un computador.

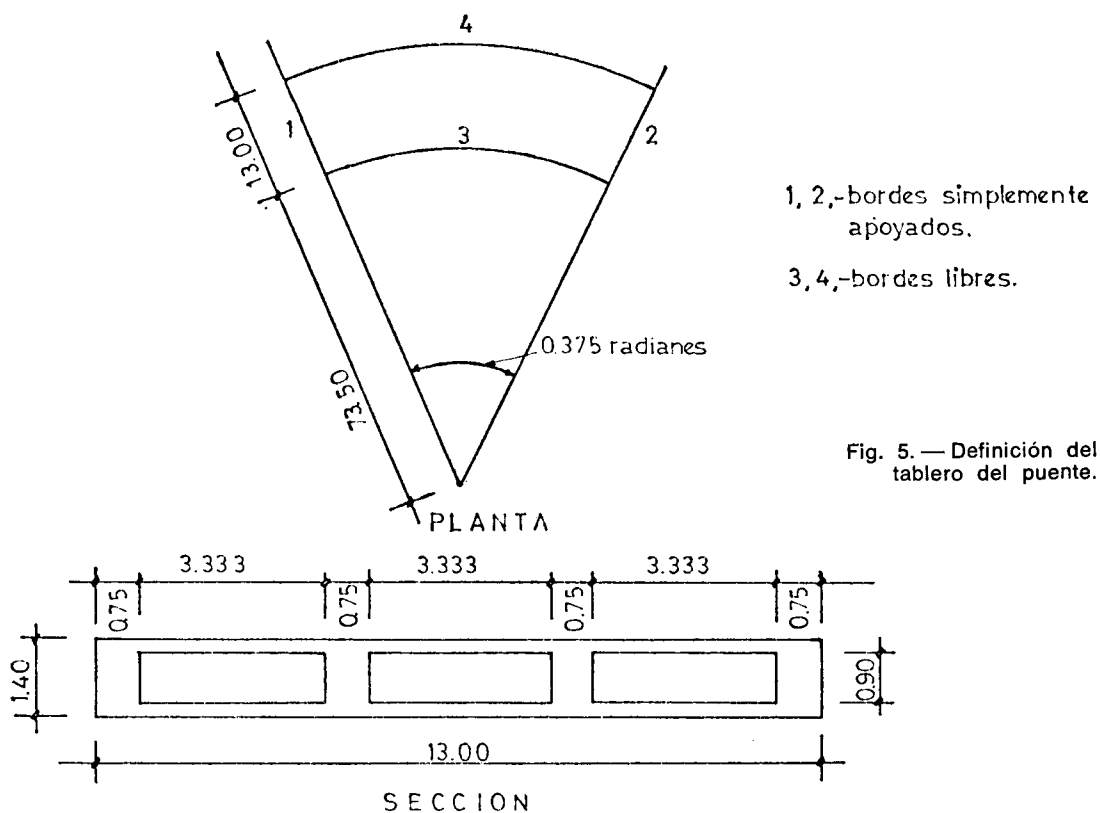
A título de ejemplo, se muestran los resultados obtenidos en un tablero de puente curvo en planta, simplemente apoyado en los bordes rectos y libre en los curvos, de sección radial constante.

La losa real es de un material homogéneo isótropo de $E = 3.000.000 \text{ t/m}^2$ y $\nu = 0,2$; cuya definición geométrica se realiza de forma esquemática idealizada en la figura 5.

Una posible losa (*) ortótropa equivalente presenta las siguientes características:

$$\begin{aligned} E_r &= 2200000 \text{ tm}^{-2} \\ E_\theta &= 2400000 \text{ tm}^{-2} \\ \nu_r &= 0,20 \\ \nu_\theta &= 0,18 \\ E_{r\theta} &= 115000 \text{ tm}^{-2} \\ E_{\theta r} &= 2600000 \text{ tm}^{-2} \\ h &= 1,40 \text{ m} \\ r_1 &= 73,50 \text{ m} \\ r_2 &= 86,50 \text{ m} \\ \alpha &= 0,375 \text{ radianes} \end{aligned}$$

(*) El objetivo de este ejemplo es ilustrativo de la solución de la losa ortótropa circular y no trata el problema de la bondad de la idealización estructural de la losa real indicada.



Las acciones a que está sometido son las recomendadas por la Instrucción Española-72; y se calcula las reacciones de apoyo y derivadas circunferenciales en los puntos A_1 , A_2 , A_3 , en el borde recto; y las flechas y momentos en los puntos C_1 , C_2 , C_3 del centro del vano (fig. 6).

Supuesto un peso específico del material de $2,5 \text{ tm}^{-3}$; además del peso propio, el tablero está sometido a una sobrecarga uniforme de $0,400 \text{ tm}^{-2}$ y a la acción del vehículo de 60 t, de acuerdo con la Instrucción Española-72.

Todos los datos de interés, desde el punto de vista del proyecto —en los puntos A_1 , A_2 , A_3 , C_1 , C_2 , C_3 , cuya situación se indica en la figura 6; con la posición del vehículo de 60 t en la posición de la figura 7—, se muestran en la tabla 3.

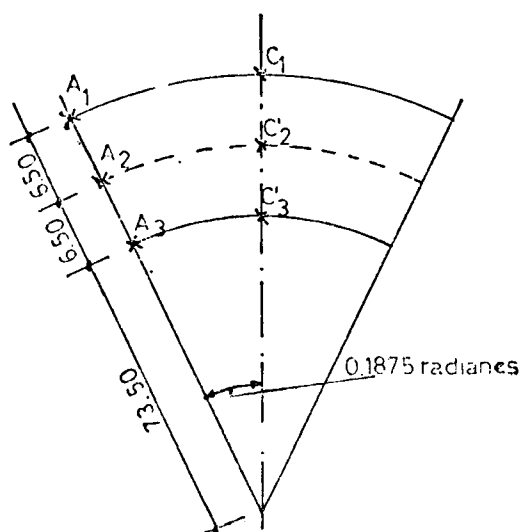


Fig. 6. — Puntos de cálculo.

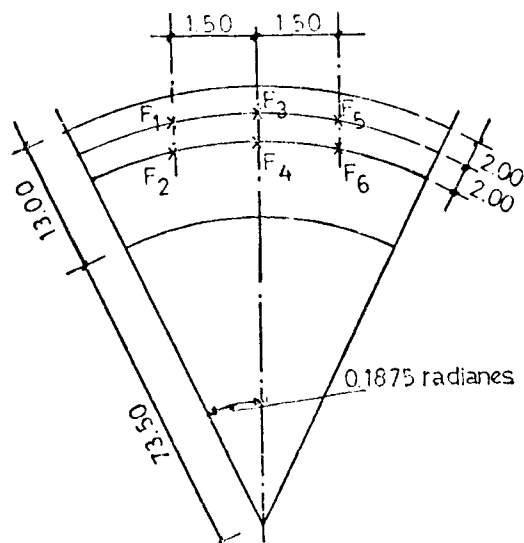


Fig. 7. — Situación del vehículo de 60 Tm.

TABLA 3

PUNTO DE ESTUDIO	ACCIONES			
	Peso propio	Sobrecarga uniforme	Vehículo de 60 t	Total
$A_1. - s_\theta$ (en t/m)	21,46	4,85	2,39	28,70
q_θ (en t/m)	25,73	5,81	2,35	33,89
l				
$-w_\theta (\times 10^4)$	50,37	11,38	7,80	69,55
r				
$m_{r\theta}$ (en tm/m)	— 3,87	— 0,87	— 1,14	— 5,88
$m_{\theta r}$ (en tm/m)	— 87,64	— 19,81	— 25,93	— 113,38
$A_2. - s_\theta$ (en t/m)	22,27	5,03	2,20	29,50
q_θ (en t/m)	25,47	5,76	2,17	33,40
l				
$-w_\theta (\times 10^4)$	42,16	9,53	5,66	57,35
r				
$m_{r\theta}$ (en tm/m)	— 2,82	— 0,64	— 1,04	— 4,50
$m_{\theta r}$ (en tm/m)	— 63,87	— 14,44	— 23,37	— 101,68
$A_3. - s_\theta$ (en t/m)	20,63	4,66	2,04	27,33
q_θ (en t/m)	26,01	5,88	1,93	33,82
l				
$-w_\theta (\times 10^4)$	36,74	8,31	3,61	48,66
r				
$m_{r\theta}$ (en tm/m)	— 1,55	— 0,35	0,91	— 2,81
$m_{\theta r}$ (en tm/m)	— 35,27	— 7,97	— 20,99	— 64,23
$C_1. - w$ (en mm)	51,01	11,51	8,59	71,11
$m_{\theta\theta}$ (en tm/m)	222,58	50,32	45,15	318,05
$C_2. - w$ (en mm)	39,62	8,90	5,64	54,16
$m_{r r}$ (en tm/m)	3,89	0,82	— 1,38	3,39
$m_{\theta\theta}$ (en tm/m)	204,91	46,32	31,41	282,67
$C_3. - w$ (en mm)	31,71	7,21	3,19	42,11
$m_{\theta\theta}$ (en tm/m)	195,33	44,16	18,38	257,87

5. CONCLUSIONES

En el presente artículo ha sido desarrollada, de forma unificada y matricial general, una teoría de placas ortótropas circulares en planta, simplemente apoyadas en dos bordes radiales y de condiciones generales en los bordes curvos, con todas las características elásticas posibles.

Se muestra, asimismo, un ejemplo de tablero, resuelto con la teoría anteriormente expuesta y la ayuda de un computador digital de 16 K *bytes* de memoria central; y, precisamente, la reducida capacidad del calculador certifica la bondad del método.

Por último, conviene resaltar la diferencia de deformaciones y esfuerzos entre los bordes curvos. Ello es explicable debido a la mayor luz del borde externo, lo cual le proporciona una mayor flexibilidad, y, por tanto, el coeficiente de reparto transversal mejora. Situación contraria ocurre con el borde curvo interior.

RECONOCIMIENTOS

Todos los cálculos para el desarrollo de este estudio han sido realizados en el computador de la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universidad de Santander, a la cual agradecemos su eficaz y desinteresada colaboración.

También mostramos nuestro reconocimiento a la Dirección General de Universidades e Investigación, ya que este trabajo forma parte del desarrollado por uno de sus becarios.

NOTACION

- r, θ, z = Coordenadas cilíndricas ortogonales (fig. 1)
 α = Angulo que forman los bordes rectos de la placa
 r_1, r_2 = Coordenadas de los bordes curvos de la placa ($r_1 < r_2$).
 r_m = Radio medio ($r_m = (r_1 + r_2)/2$).
 v, u = Indica derivada parcial de la variable v con respecto de la variable u .
 m_{ij} = Momento esfuerzo por unidad de longitud positivo si actuando en la cara $i = \text{cte}$ produce tracciones en la dirección j , en la cara frontal y en la parte positiva del eje z (figura 2). La directriz de la placa coincide con su plano medio ($i, j = r, \theta$).
 q_j = Esfuerzo cortante por unidad de longitud positivo si actuando en la cara $j = \text{cte}$ tiene el sentido de z positivo en la cara frontal (fig. 2) ($j = r, \theta$).
 h = Espesor de la placa.
 P_z = Fuerza vertical actuante por unidad de superficie (fig. 2) en sentido positivo coincide con el del eje z .
 G_j = Momento actuante por unidad de superficie (fig. 2); coincide su sentido positivo con el del eje j ($j = r, \theta$).
 ν_j = Coeficiente de Poisson en la dirección j ($j = r, \theta$).
 E_j = Módulo de elasticidad en la dirección j ($j = r, \theta$).

REFERENCIAS

1. CUSENS, A. R., y POMA, A. R.: "Distribution of concentrated loads on orthotropic bridge decks". *The Structural Engineer*, septiembre 1969.
2. SAMARTÍN, A., y MARTÍNEZ, J.: "Reparto transversal de la sobrecarga en tableros de puentes". *Hormigón y Acero*, núm. 113, 1974.
3. COULL, A., y CHANDRA, P.: "Analysis of curved bridge decks". *Proc. of the Institution of Civil Engineers*, vol. 37, mayo 1967.